

（論文）

(S, s) 経済分析における代数的アプローチ

八 木 直 人

1 はじめに

本論文では、(S, s)型調整ルールにしたがう経済のマクロ動学的性を、代数的手法を用いて分析するフレームワークを提示する。個々の主体が片側(S, s)ルールに基づく非連続的な調整を行い、調整過程の中で主体同士が相互作用するような一般化された(S, s)経済のモデルをグラフとして定義する。各主体が行う局所的調整とマクロ経済全体としての大域的調整の過程をそれぞれ演算として定義し、演算の集合に対する代数構造の分析を通じて調整過程の安定性について分析を行う。とくに長期的な定常状態においては大域的調整過程の演算の集合がアーベル群（可換群）をなすことを示し、その性質を用いて経済の定常状態の分析を行う。最後に在庫調整モデルにおける応用例を示す。

2 (S, s) 経済モデル

比較的最近に至るまで、調整費用を含むマクロ経済分析の大半が凸型費用関数に基づく費用関数を用いてきた。凸型費用関数による調整過程の分析は技術的に扱いやすく、またミクロ的意志決定モデルとして直感的に理解しやすかったため、理論モデルから実証研究に至るまで幅広く応用されてきた。しかしその一方で、 q 投資理論や線形 2 次形式モデルに基づく雇用モデルの説明力の弱さなど、必ずしも十分に成功したとは言いがたい面もあった。

凸型の費用関数による調整過程は、なめらか smooth でかつ連続的 continual な調整過程となる特徴があるが、近年のミクロ経済研究の結果から企業レベル（マイクロデータ）における調整は非連続的 infrequent で大きく一塊的 lumpy に行われていることが明らかになってきた。Dome and Dunne (1998) は、17 年間に及ぶ米国製造業プラントの大規模サンプルデータを用い、全期間のプラント設備投資のうち約 25%がたった一年のうち行われ、半分以上のプラントが資本調整の少なくとも 37%を一年の間に行っていることを発見した。Cooper, Haltiwanger and Power (1999) は、同様のデータセットを使って一塊的な投資 Lumpy Investment の証拠を示した上で、大きな投資の連鎖が起きた後では投資が起こる条件付き確

率が上昇することを示している。また Hamermesh and Pfann (1996) は雇用調整において非連続的なミクロ的調整が行われている証拠が豊富にあることを示している。

Scarf (1960) にはじまる一連のミクロ経済学的研究は、これらの非連続的 infrequent で一塊的 lumpy な調整が企業が非凸型の費用関数を持つときに生じることを示した。小売業のある期の在庫保有量を x とする。企業は確率的な外生需要 y に接しており、各期の最後に在庫保有を回復するために生産を行うとする。Scarf (1960) は、一回生産するごとにそれぞれ固定的な費用がかかる場合、Value Function の K -凸性という概念を用いて、次のような片側 (S, s) ルールが企業にとって最適な在庫調整ルールであることを証明した。

$$x' = x - y + m\Delta \quad (1)$$

$$m = \begin{cases} 0 & \text{if } x - y \in (s, S] \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

ここで $\Delta = S - s$ である。企業は生産するごとに固定費用がかさむのを避けるために、在庫ストックが $(s, S]$ の間にあるときには生産を行わず、在庫が下限 s を下回ったときだけまとめて Δ だけの生産を行い、一気に在庫の水準を回復する。図 1 は $(S, s) = (3, 0)$ のケースにおいて、ランダムな需要に対する状態変数（在庫ストック）の変化を表したものである。

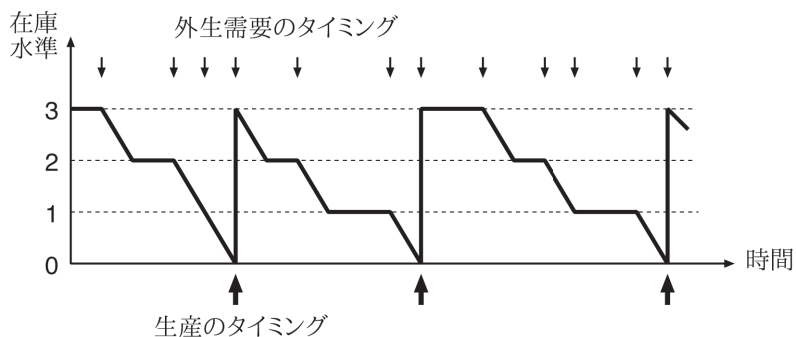


図 1: (S, s) 在庫政策と状態変数の推移

このような (S, s) 的調整ルールの最適性は 1960 年代以降よく知られていたにもかかわらず、その振る舞いの複雑さゆえにマクロ経済学的分析に应用されることが少なかった。 (S, s) 調整ルールのマクロ的特性を分析した初期の代表的な研究は Caplin (1985) である。Caplin (1985) は、 (S, s) 調整ルールをとる主体が単純に n 個集まった経済を次のような (S, s) 経済と定義し、再帰的集合上における確率分布などの確率論的振る舞いを分析している。

定義 1 次の C1 ~ C3 の要素からなる経済を、 (S, s) 経済とよぶ。

C1. 主体の集合: $N = (1, \dots, n)$

C2. (S, s) 的調整ルール: $\forall i \in N, (S_i, s_i)$ such that $\Delta_i = S_i - s_i > 1$

C3. 各主体の状態変数の遷移式: $x'_i = x_i - y_i + m_i \Delta_i$

Caplin による (S, s) 経済は、(S, s) 調整ルールをマクロ集計化したときの特性の分析として先駆的なものであったが、調整過程における各主体ごとの相互作用がなく各主体が単独で (S, s) 調整を行う主体の集合であるため、結論も比較的単純なものであった。

Caballero and Engel (1991) は、Caplin (1985) に近い理論的分析のフレームワークを用いながら、状態変数の集計値と各主体の行動が相互作用する (S, s) 経済を定義し、非常状態から定常状態への遷移と定常状態における確率分布を分析している。Caballero and Engel (1991) はマクロ (S, s) 経済において主体と集計値との相互作用を取り入れた先駆的研究であり、このクラスのモデルは、非常に広範な応用性を持ったモデルである。彼らは論文の中で (S, s) 経済のフレームワークが、(1) メニューコストが存在するときの価格設定問題 The Pricing Problem、(2) 引出コストが存在する場合の貨幣保有量問題 The Cash-Balance Problem、(3) 機械設備の更新による技術更新問題 The Technology Update Problem、(4) 消費者の意志決定にコストがかかる耐久財問題 The Durable Goods Problem、(5) 非凸型の調整費用がかかる場合の資本調整問題 The Capital Stock Adjustment Problem といった様々な経済問題に応用できることを指摘している。また他の文献では雇用調整問題 The Employment Adjustment Problem や空間構造を持ったゲーム理論のモデルなどにも共通のフレームワークが見られる¹。

3 一般化された (S, s) 経済モデル

3.1 (S, s) 経済の複雑な特性

Caplin (1985) および Caballero and Engel (1991) はともに (S, s) 経済のマクロ集計特性に関する先駆的研究であるが、図 1 で示されるようなミクロレベルにおける複雑な (S, s) 調整の動学特性は、マクロレベルでは丸められ打ち消されてしまうという結論を得ている。それは Caplin (1985) では主体間の相互作用がなく、Caballero and Engel (1991) では主体が集計量というマクロ変数を通じてのみ相互作用すると仮定されているからに他ならない。

しかし現実的な (S, s) 経済において、本当に図 1 で示されるような (S, s) 的動学特性がキャンセル・アウトするのだろうか。その点を確認するために図 2 に示される簡単なモデルを見てみよう。いま $(S, s) = (2, 0)$ の (S, s) 在庫調整ルールに従っている同質な企業が複数存在するとしよう。各企業は自分の在庫がストックアウトしたときのみ 2 単位の生産を行い、同時に右隣の企業の財を中間投入として 1 単位必要であるとする。それぞれの企業は (S, s) ルールに従って生産と在庫調整を行いながら、中間投入のつながりによって局所的に相互作用することになる。

図 2-1 のケースでは、1 単位の外生需要が生じたとしてもその需要は在庫ストックによって吸収されてしまい、企業の在庫はストックアウトしない。したがってこの場合は生産はゼロである。しかし図 2-2 のケースを見てみよう。図 2-2 のケースが図 2-1 のケースと異なるのは、マクロレベルでの在庫ストックが 1 単位少ないという点だけで、その他はまったく同一である。にもかかわらず図 2-1 のケースとは大きく異なった結果となる。外生需要を受けた企業は在庫のストックアウトを起し生産を行う。その際に右隣の企業に中間投入財の派生需要を生じる。今度は派生需要を受けた企業が在庫のストックアウトを起し生産を行い、また右隣の企業に派生需要を生じる。こうして派生需要の連鎖としての大域的な調整過程が生じ

ることになる。

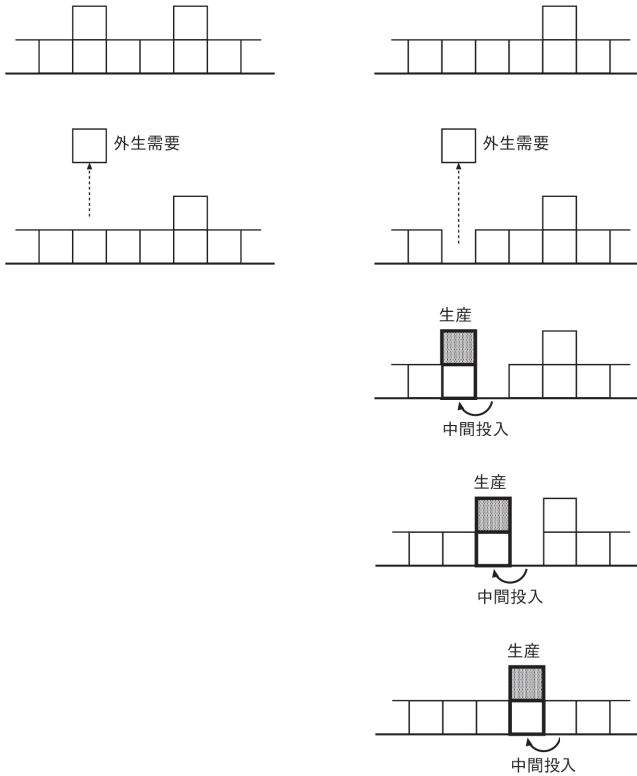


図2-1：調整過程が生じない例

図2-2：調整過程が生じる例

図2-1のケースと図2-2のケースとは、ミクロの在庫保有状態がたった一ヶ所異なっているだけで、マクロ的な状態で見ればほとんど同一である。にもかかわらず生じる結果はこのように大きく異なる。マクロ状態の初期値におけるわずかな差異が非常に大きな結果の相違を生み出すことになる。すなわち非凸性という非線型性によって「初期値に対する鋭敏な依存性」を持つことになる。

図1からもわかるように、(S, s)経済は状態変数を閾値の上限と下限で「折りたたむ」効果が内蔵されている。と同時に、図2のような局所的な調整の過程の連鎖を通じて主体間の相互作用が生じ、「折りたたみ」の効果を遙か遠方まで伝播させる。「折りたたみ」と「増幅」はカオスの振る舞いの基本原理であり、(S, s)経済はそれを内蔵している。その結果、(S, s)経済における大域的な調整過程が「初期値に対する鋭敏な依存性」という複雑系としての特性を示すことになるのである。

Caplin (1985) および Caballero and Engel (1991) のモデルがこのような結論を得られなかった要因は、各主体間の相互作用の定式化においてこのような重要な要素を排除している点にある。むしろ(S, s)経済にける調整過程の本質は、局所的な調整過程の累積が大域的な調整過程を構成するその間でこのようなカオスの振る舞いの要素をはらんでいる点にあるといってもいい。そこで以下の節では、Caplin (1985) のモデルに局所的な(S, s)的調整過程の相

相互作用を明示的に組み込んだ一般化された(S, s)経済モデルを定義し、局所的な調整過程の累積が大域的な調整過程を構成する中で生じる性質を分析する。

3.2 グラフによる定式化

以下では在庫調整モデルに限らず、一般的なフレームワークを定義する。あつかうモデルは以下のようなものである。各主体のインデックスを $i \in N$ とし、主体の集合を $N = \{1, \dots, n\}$ とする。各主体 i に固有の状態変数を x_i とし、状態変数ベクトルを $x = (x_1, \dots, x_n)$ とする。状態変数ベクトルの空間 \mathcal{X} は次のように定義される。

$$\mathcal{X} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Z}^n \mid x_i \geq 0, \forall i \in N\} \quad (3)$$

各主体 $i \in N$ は固有の値 (S_i, s_i) で特徴付けられる(S, s)調整ルールに従っているとする。この(S, s)調整ルールのもとでの安定な状態ベクトルの空間 \mathcal{S} は次のように定義される。

$$\mathcal{S} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X} \mid S_i \geq x_i > s_i, \forall i \in N\} \quad (4)$$

ここで Δ_{ii} を各主体に固有の上限 S_i と下限 s_i の差と等しく $\Delta_{ii} = S_i - s_i$ とする。各主体は状態変数 x_i が下限 s_i を下回ったとき状態変数 x_i を Δ_{ii} だけ回復すると同時に他の主体 j の状態変数 x_j を Δ_{ij} だけ減少させる。この Δ_{ij} の項が、各主体に固有の (S_i, s_i) 調整ルールが局所的な安定化の作用を通じて、(S, s)的な折りたたみの効果を他の主体へと伝播していく仕組みを明示的に示している。

このような一般化された(S, s)経済モデルは、次のような隣接行列 adjacency matrix ; Δ によって規定される重みつき有向グラフ weighted digraph をなす。

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

3.3 局所的安定化と大域的安定化の作用素

状態変数ベクトル x が安定な空間 \mathcal{S} の外にあるとき、少なくとも一つの主体 i は状態変数が (S_i, s_i) 調整ルールの下限 s_i を下回った状態にある。このときこの主体 i は、固有の (S_i, s_i) 調整ルールにしたがって局所的な調整を行う。この主体 i による調整は次のような状態変数ベクトルを別の状態変数ベクトルに写す空間 \mathcal{X} 上の演算 $\phi_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in \mathcal{S} \\ x + \Delta_i & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

と表せる。演算 ϕ_i は主体 i の(S, s)調整ルールに基づく局所的な安定化作用素 operator であ

る。この演算は、状態変数ベクトル x が安定な空間 S の外にあり下限 s_i を下回る主体がいる限り繰り返し作用し、状態変数ベクトルが $x \in S$ となるまで続く。

仮に $x \in S$ となるまでに各演算 ϕ_i がそれぞれ m_i 回ずつ作用したとする。このとき各主体の局所的安定化の全体が、演算 $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow S$ として、次のように定義することができる。

$$\Phi(x) = \prod_{i \in N} \phi_i^{m_i}(x), \quad (m_i \geq 0) \quad (7)$$

演算 Φ は状態ベクトル全体を安定な空間 S に写すものであるから、大域的な安定化作用素ということができる。

3.4 外生的攪乱の作用素

上の大域的安定化作用素 Φ に基づいて、主体 i に生じた外生的攪乱に対する安定化作用素を次のように定義することにする。まず $x \in S$ において主体 i に生じる 1 単位の外生的攪乱を、次のような演算 $\Upsilon_i: S \rightarrow \mathcal{X}$ として定義する。

$$\Upsilon_i(x) = x - \delta_i = (x_1, \dots, x_i - 1, \dots, x_n) \quad (8)$$

さらに、外生的攪乱と大域的安定化の合成写像を $a_i = \Phi \cdot \Upsilon_i$ と表すと、 a_i は安定な空間 S から安定な空間 S に写す写像 $a_i: S \rightarrow S$ を意味する。この演算 a_i は、状態ベクトル $x \in S$ において、主体 i に 1 単位の外生的攪乱が生じることによって x が S の外にはみ出し大域的な安定化作用素 Φ によって状態ベクトル x を再び安定な空間 S に収束するまでを、一つの演算として表すものである。

3.5 定義および問題設定

以上の議論から、一般化された (S, s) 経済モデルを以下のように定義する。

定義 2 次の D1 ~ D3 の要素からなる経済を、一般化 (S, s) 経済とよぶ。

D1. 主体の集合: $N = (1, \dots, n)$

D2. グラフ上の隣接行列 Δ で表される (S, s) 的調整ルール

D3. 状態変数ベクトルの遷移式: $x' = a_i(x)$

さて、以上のように定義された一般化された (S, s) 経済モデルにおいて、考察されるべき問題とはどのようなものになるだろうか。問題は大きく分けて、大域的安定化作用素 Φ に関する問題と外生的攪乱作用素 a_i の性質および代数構造に関する問題にの二つに分けられる。

大域的安定化作用素 Φ に関する問題はさらに次の三つの問題に分かれる。

問題 1: 大域的安定化作用素 Φ は有限時間内に収束するか。

問題 2: Φ は一意の状態ベクトル $x \in S$ に収束するか。

問題 3: Φ における $m = (m_1, \dots, m_n)$ は一意か。

作用素 Φ に関する問題 1 は、一般化された (S, s) 経済モデルにおける基礎的な安定性の問題である。もしある主体 i の (S, s) 的調整が他の主体の (S, s) 的調整を引き起こし、その連鎖が有限時間のうちに収束しないのであれば、(S, s) 経済モデルは永遠に安定空間 S に収束しないことになり、基本的な安定性を持たないことになる。グラフ上の主体間の相互作用によって生じる調整の連鎖は非常に複雑であるため、この安定性は必ずしも自明なものではない。

問題 2 および問題 3 は作用素 Φ の表現の一意性もしくは演算が矛盾なく定義されている (well-defined) かどうかの問題である。 Φ が有限時間に収束するとしてもその収束先が一意でないのであれば、演算 Φ が well-defined であるとはいえない。また仮に収束先が一意であってもその収束経路が複数あり、 Φ における m が経路によって違う値を取るのであれば、 Φ は well-defined であるとはいえない。したがってこれらの問題が肯定的に解決されない場合は、一般化された (S, s) 経済モデルの分析は非常に複雑になり茫漠とした結論しか得られないかもしれない。ここで問題 3 が肯定的に解決されることは、問題 2 の肯定的解決の十分条件になっているので、実質的には問題 3 のみを考察することにする。

一方、外生的攪乱作用素 a_i に関する問題は、次の二つの問題に分かれる。

問題 4：演算 a_i の集合にはどのような代数構造があるか。

問題 5：外生的攪乱作用素 a_i をランダムにくり返し作用させたとき、定常状態において再帰的に生成する状態ベクトルの集合 \mathcal{R} はどのようなものか。

問題 5 は、(S, s) 経済の長期的な定常状態の集合に関する問題である。問題 1 が肯定的に解決されるならば、(S, s) 経済は攪乱が生じても a_i によって必ず安定空間 S に写される。しかし長期的な定常状態において再帰的に生じる集合 \mathcal{R} が $\mathcal{R} = S$ なのか、 $\mathcal{R} \subset S$ なのか、あるいは $\mathcal{R} = \emptyset$ なのかについては自明ではない。問題 4 は、問題 5 で与えられた長期的な安定性を分析するときの土台となる問題である。

4 代数的分析

本節では前節で提示した問題にそって、代数的観点から一般化された (S, s) 経済モデルを分析する²。

4.1 Φ に関する分析

まずはじめに安定性に関する問題 1 から考察しよう。大域的安定化作用素 Φ の収束性に関して次のような命題が得られる。

命題 1 Φ が S 上のある点に有限時間内に収束するための必要条件は、行列 Δ が分解不能行列³であることである。

証明 背理法を用いる。はじめに演算 Φ が有限時間内に収束しないと仮定する。行列 Δ が分解不能行列であれば、行列 Δ が随伴するグラフ上の任意の主体 i と主体 j の間に経路が存在する。仮に主体 i が $\sum_j \Delta_{ij} = 0$ であっても、主体 i から $\sum_j \Delta_{ij} > 0$ である主体 k への経路が存在

する。したがって安定化作用素 ϕ によって有限時間 $T < \infty$ までには必ず主体 k の状態変数 x_k を減少させる。仮定よりこの有限時間 T は無限回くり返されるから、主体 k の状態変数 x_k は無限に減少しつづける。これはすべての主体 i に下限 s_i が存在することと矛盾。(証明了)

また命題 1 のより強い命題として次の系がしたがう⁴。

系 1 演算 Φ が S 上のある点 x に有限時間内に収束するための必要条件は、すべての主体 i に対して $\sum_j \Delta_{ij} > 0$ であることである。

グラフの隣接行列 Δ の分解不能性に関しては、次のような命題を容易に証明することができる⁵。

命題 2 Δ が分解不能であることの十分条件は、次の条件 1 ~ 4 が満たされることである。

$$\text{条件 1: } \forall i \in N, \Delta_{ii} \geq 1$$

$$\text{条件 2: } \forall i, j \in N, \Delta_{ij} \leq 0$$

$$\text{条件 3: } \forall i \in N, \sum_j \Delta_{ij} \geq 0$$

$$\text{条件 4: } \sum_i \sum_j \Delta_{ij} > 0$$

命題 2 における条件は次のような意味を持つ。条件 1 は (S, s) 的調整によって主体 i が状態を回復させるよう正の調整をする条件であり、条件 2 は主体 i の (S, s) 的調整によって他の主体 j が負の影響を受けるという条件である。条件 3 は他の主体 j に与える負の影響の総和が主体 i が回復する正の調整の大きさを超えないという条件であり、条件 4 は、少なくとも一つの主体は他の主体 j に与える負の影響の総和が主体 i が回復する正の調整の大きさよりも厳密に小さく、(S, s) 調整における他の主体への波及効果が経済全体としては必ず減衰していくという条件である。ほとんどの一般化された (S, s) 経済モデルは、これらの条件を満たすと考えてよいだろう。

問題 3 で与えられた Φ の一意性の問題に関しては、次の命題が得られる⁶。

命題 3 任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して、演算 $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow S$ における $m = (m_1, \dots, m_n)$ は一意である。

命題 1 と命題 3 より Φ の well-definedness は示され、次の定理がしたがう。

定理 1 グラフの隣接行列 Δ が条件 1 ~ 4 を満たすならば、一般化された (S, s) 経済の調整過程が有限時間内に収束し、その調整過程の演算 Φ は一意に表せる。

個々の生産オペレータ ϕ_i 自体は線形変換に過ぎないから、定理 1 より $m = (m_1, \dots, m_n)$ が

一意に定まったならば、大域的安定化作用素 Φ は、有限個の局所的安定化作用素 ϕ_i の積の結果として、次のように「表現」することができる⁷。

$$\Phi(x) = \prod_{i \in N} \phi_i^{m_i}(x) = x + m\Delta \quad (9)$$

4.2 a_i の可換性

次に、外生的攪乱作用素 a_i の代数的分析に移ろう。定理 1 より、1 単位の外生的攪乱が加わったときの a_i による変換は次のように「表現」できる。

$$a_i(x) = \prod_{i \in N} \phi_i^{m_i}(x - \delta_i) = x - \delta_i + m\Delta \quad (10)$$

ここで、外生的攪乱が 1 単位ではなく、主体 i に y_i 単位ずつ $y = (y_1, \dots, y_n)$ というベクトルの形で生じたとしよう。このとき各外生的攪乱に応じて (S, s) 的調整が生じ、演算 a_1 が y_1 個、演算 a_2 が y_2 個、 \dots 演算 a_n が y_n 個作用する。もしベクトル y の外生需要に対する複合した乗数過程を表す演算が $a_1^{y_1} a_2^{y_2} \dots a_n^{y_n}$ という合成写像で表せると仮定すると、複合した調整過程による安定化プロセスをまた一つの演算 $g = a_1^{y_1} a_2^{y_2} \dots a_n^{y_n}$ と表せることになる。

ここで演算の可換性について考えよう。同じ外生的攪乱 $y = (y_1, \dots, y_n)$ に対して、演算の順序を入れ替えた

$$g = a_1^{y_1} \dots a_i^{y_i} \dots a_j^{y_j} \dots a_n^{y_n} \quad g' = a_1^{y_1} \dots a_j^{y_j} \dots a_i^{y_i} \dots a_n^{y_n}$$

が異なった結果をもたらすとしたら、一つの外生的攪乱ベクトル y に対して複数の演算 g, g' が対応することになる。 a_i の可換性が成り立たないとすると、外生的攪乱 y の作用を一意に表せないことになり、分析は非常に難しくなる。

これについては、Dhar (1990) により次のような有用な命題が得られている。

命題 4 a_i は可換である。すなわち任意の i, j について、 $a_i a_j = a_j a_i$ が成り立つ。

Dhar (1990) はこの定理の証明として、局所的安定化作用素 ϕ_i の可換性を用いて次のような議論をしている。すなわち、任意の二つの局所的安定化作用素の積 $\phi_{i_1} \phi_{i_2}$ は、それぞれ調整過程の影響を受ける主体 j の状態変数を $x_j + \Delta_{i_1, j} + \Delta_{i_2, j}$ に変換する。しかしこれは演算の順序を変え $\phi_{i_2} \phi_{i_1}$ としても $x_j + \Delta_{i_2, j} + \Delta_{i_1, j}$ であるから同等である。よって局所的安定化作用素 ϕ_i は可換であり、このことから a_i の可換性も成り立つ。しかし Dhar (1990) のこの証明の議論は、 ϕ_i の可換性と a_i の可換性を混同したものであり、必ずしも外生的攪乱作用素 a_i の可換性を証明していることにはならない。厳密に $a_i a_j = a_j a_i$ を証明するためには、

$$\Phi(\Phi(x - \delta_i) - \delta_j) = \Phi(\Phi(x - \delta_j) - \delta_i) = \Phi(x - \delta_i - \delta_j) \quad (11)$$

を証明する必要がある。だがこの命題は幸いなことに肯定的に証明することができる⁸。

演算 a_i の可換性が成立すれば、

$$g = a_1^{y_1} \cdots a_i^{y_i} \cdots a_j^{y_j} \cdots a_n^{y_n} \quad (12)$$

$$= a_1^{y_1} \cdots a_j^{y_j} \cdots a_i^{y_i} \cdots a_n^{y_n} = g' \quad (13)$$

より、 $g=g'$ となるので、

$$g = \prod_{i \in N} a_i^{y_i} \quad (14)$$

は、演算の順序に関わらず一意にあることがわかる⁹。この一意性によって外生的攪乱ベクトル $y=(y_1, \dots, y_n)$ に対する複合的な (S, s) 調整過程の全体が一つの演算 g と表すことができるようになる。複合的な調整過程の間に生じる各主体 i の局所的安定化作用素 ϕ_i の作用回数を $m=(\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_n)$ と定義すれば、外生的攪乱によって状態変数ベクトル $x \in S$ は、

$$x' = \prod_{i \in N} a_i^{y_i}(x) \quad (15)$$

$$= \Phi(x - y) \quad (16)$$

$$= x - y + \tilde{m}\Delta \quad (17)$$

となる。

4.3 a_i の代数構造と \mathcal{R} のサイズ

安定な状態変数ベクトル $x \in S$ の中で、任意の外生的攪乱の累積 $v=y^1+y^2+\dots+y^T$ による演算

$$\prod_{i \in N} a_i^{v_i} = \prod_{i \in N} a_i^{y_i^1} \cdot \prod_{i \in N} a_i^{y_i^2} \cdots \prod_{i \in N} a_i^{y_i^T} \quad (18)$$

によって再び同じ配列に戻ってくる状態ベクトルの集合

$$\mathcal{R} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Z}^n \mid \prod_{i \in N} a_i^{v_i}(x) = x \right\} \quad (19)$$

を再帰的 recurrent な集合と定義しよう。また集合 S における集合 \mathcal{R} の補集合 \mathcal{R}^c を推移的 transient な集合とする。安定な空間 S の位数 $|S|$ は高々 $\prod_{i \in N} \Delta_{ii}$ 個に過ぎないから、有限回の外生的攪乱の繰り返しの中で、必ず再び同じ状態ベクトルに戻ってくる。したがって \mathcal{R} は非空である。

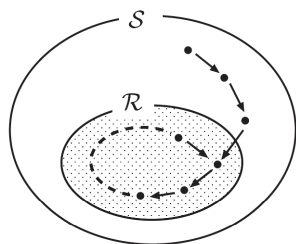


図3：再帰的な在庫配列の集合 \mathcal{R}

いま、再帰的集合 \mathcal{R} 上に働く演算 a_i の集合を

$$G = \left\{ g = \prod_{i \in N} a_i^{v_i} \mid \prod_{i \in N} a_i^{v_i}(x) = x'; x, x' \in \mathcal{R} \right\} \quad (20)$$

と定義すると、 a_i が可換性を満たすことから G の次のような代数構造を示すことができる¹⁰。

命題5 G は可換群 (アーベル群) をなす。

ここでさらに外生的攪乱のベクトル v の集合 \mathbf{Z}^n から G への写像 \mathcal{M} を次のように定義しよう。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} : \mathbf{Z}^n & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ v & \longmapsto & g = \prod_{i \in N} a_i^{v_i} \end{array}$$

ここで写像 \mathcal{M} が準同型写像であるから、準同型定理から次の命題がいえることになる¹¹。

命題6 $\mathbf{Z}^n / \text{Ker}(\mathcal{M}) \cong G$

G と \mathcal{R} の間の関係は、集合 G の左剰余類と状態ベクトル $x \in \mathcal{R}$ の G -軌道を考察することで \mathcal{R} と G の位数が等しいことを示すことができる。

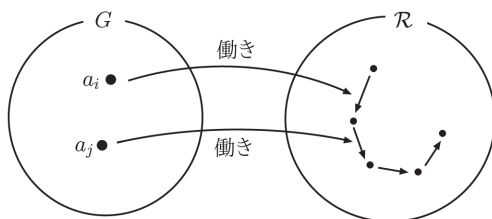


図4：演算の集合 G と \mathcal{R} 上への働き

したがって、以上の議論から外生的攪乱ベクトルと長期的な定常状態における再帰的集合 \mathcal{R} の間に次の定理が成り立つ。

定理2 $|\mathbf{Z}^n / \text{Ker}(\mathcal{M})| = |G| = |\mathcal{R}|$

定理 2 で得られた関係を図に表すと図 5 のようになる。

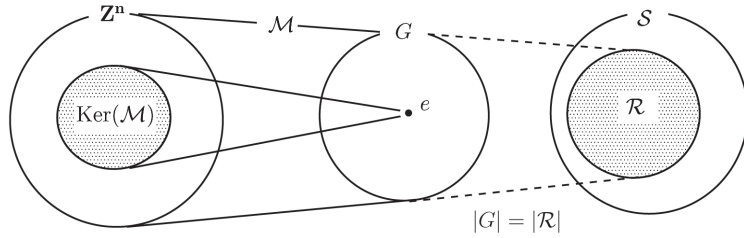


図 5：外生需要の空間 Z^n と再帰的な在庫配列の集合 \mathcal{R} の関係

5 (S, s) 在庫モデルへの応用

前節で代数的に分析した一般化された (S, s) 経済モデルを、在庫モデルに応用してみよう。各主体 i は生産を行う企業であり、状態変数 x_i を在庫保有量とする。各企業は (S_i, s_i) で特徴付けられる (S, s) 在庫政策ルールに従っている。 $\Delta_{ii} = S_i - s_i$ は 1 回の生産における生産ロットを表し、グラフの隣接行列 Δ はその投入産出の関係を表している。隣接行列に課される安定性の十分条件は以下ようになる。

条件 1'：すべての企業 i の生産量は必ず正： $\Delta_{ii} = S_i - s_i > 0$

条件 2'：企業 i の企業 j 商品に対する中間財需要は非負： $-\Delta_{ij} \geq 0, (\Delta_{ii} \leq 0)$

条件 3'：企業 i の利潤は非負： $\pi_i = \sum_j \Delta_{ij} \geq 0$

条件 4'：経済全体の総付加価値生産は必ず正： $\sum_i \sum_j \Delta_{ij} > 0$

経済は、外生需要 y を外生的な攪乱として遷移する。(S, s) 在庫政策のマクロ経済分析の先駆である Caplin (1985) の (S, s) 経済の定義は、中間投入のない粗生産額モデルであり $\Delta_{ij} = 0$ のケースに相当する。

企業 j の要素だけを取り出して、企業 j の在庫保有の遷移方程式を得ると次のようになる。

$$x'_j = x_j - y_j + \tilde{m}_j \Delta_{jj} + \sum_{i \neq j} \tilde{m}_i \Delta_{ij} \quad (21)$$

企業 j の生産と付加価値、および需要の関係を導くと

$$\underbrace{\tilde{m}_j \Delta_{jj} + \sum_{i \neq j} \tilde{m}_i \Delta_{ij}}_{\substack{\text{付加価値} \\ \text{総生産} \quad \text{中間投入}}} = \underbrace{y_j + (x'_j - x_j)}_{\substack{\text{最終需要} \\ \text{在庫変動}}} \quad (22)$$

となる。これは産業連関分析における販路構成を示している。一方、当該期に企業 j が m_i 回生産を行ったとすると、その期における企業 j の利潤は

$$\begin{aligned}\Pi_j &= \tilde{m}_j(\Delta_{jj} + \sum_{i \neq j} \Delta_{ji}) \\ &= \tilde{m}_j \Delta_{jj} + \sum_{j \neq i} \tilde{m}_j \Delta_{ji}\end{aligned}\quad (23)$$

となる。これは縦方向の費用構成を表している。

Caplin (1985) における数値例に合わせて $\Delta_{ii} = 3$ のケースについて数値例を見てみると次のようになる。

中間投入：	0 単位	1 単位	2 単位
安定集合の位数 $ X $ ：	9 個	9 個	9 個
行列 Δ ：	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
再帰的集合の位数 $ \mathcal{R} $ ：	9 個	8 個	5 個

それぞれの例において、1 単位ずつのランダムな外生需要が生じた場合に、在庫配列が安定な在庫空間の中でどのように遷移するか、また安定な在庫空間の中で再帰的な在庫配列の集合はどのようになっているかを表したのが図 6 である。

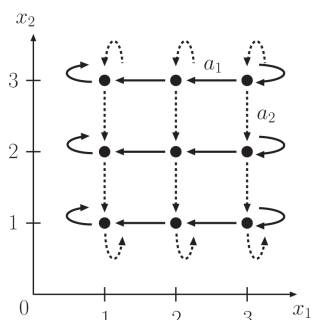


図 6-1：中間投入 0

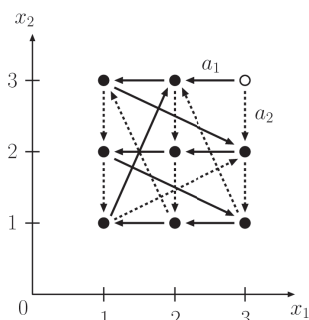


図 6-2：中間投入 1

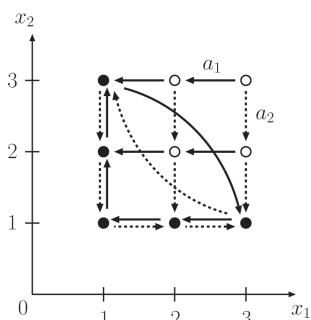


図 6-3：中間投入 2

図 6：安定集合 \mathcal{X} と再帰的集合 \mathcal{R} の関係

(●：再帰的な在庫配列、○：非再帰的な在庫配列)

この例を見ると、1 回の生産において中間投入を多く必要とするケース、すなわち企業間の産業連関による結びつきが強く付加価値率が小さい経済においては、エルゴード性が成り立たず相空間における再帰的な点の集合はより小さくなっていることがわかる。再帰的な集合 \mathcal{R} の数が小さいとは、在庫の変動が小さく付加価値の変動も小さいことを意味する。すなわち産業連関の構造が景気循環の大きさに影響を与えていることになる。

この結論からわかるように産業連関の密接さ、あるいは企業間の相互作用の度合いを $|\mathcal{R}|$ で表せば、相互作用が強い経済の方がより景気変動を安定化させるという結論が得られる。

6 終わりに

本論文では、Caplin (1985) モデルを拡張した一般化(S, s)経済を定義し、一般化(S, s)経済のマクロ動学的特性を、群論を中心とした代数的アプローチによって分析する方法を提示した。ミクロレベルの主体の局所的相互作用素 ϕ_i については調整過程の安定条件と表現の一意性、外生的攪乱に対する大域的安定化作用素 a_i については、演算の可換性を示し、演算の代数構造を通じて長期的な安定集合を示した。

本論ではモデルの代数的構造を中心に論じ、その確率的な側面は論じなかったが、Caplin (1985) や Caballero and Engel (1991) と同様に、需要を確率的なものに拡張した場合における確率的な挙動を、マルコフ連鎖として記述することが可能である。また、需要に関しては任意のベクトルとし、消費者行動と需要ベクトルに関しては議論しなかった。モデルから得られる結論は任意のベクトルに対して成り立つから、ある消費者の最適化行動を定式化し、それから得られる需要ベクトルに対しても結論は一般に成り立つ。したがって、本論文で議論した一般化 (S, s) 経済モデルは、確率動学一般均衡モデルの中に組み込むこともできるだろう。

注

* 本稿は、東京大学大学院経済学研究科・自主研究として提出されたモデルに基づいている。モデルに対して岩井克人教授から貴重なコメントをいただいた。ただし本稿に残る誤りはすべて著者の責によるものである。

1. Fisher and Hornstein (2000) は、サーチ理論と組み合わせることで内生的な片側 (S, s) 調整ルールを持つ一般均衡モデルを分析している。また Kahn and Thomas (2007) は、動学一般均衡モデルにもとづく分析によって非凸型費用関数が集計的な在庫の cyclical な変動を説明することを示している。
2. 紙幅の都合から証明の過程は省略する。この節で得られる結論は Yagi (2009) によって詳細な証明が与えられている。
3. 隣接行列 Δ で表されるグラフ G において経路 pass が存在するとは、 $\Delta_{ij} \neq 0$ である主体 i と主体 j をつなげていくことで、二つの主体をつなぐことができることをいう。すべての主体 $i, j \in N$ について経路 pass が存在するとき、グラフ G を強連結 strongly connected という。グラフが強連結のとき、隣接行列 Δ を分解不能という。
4. この系 1 は、産業連関分析におけるソロー条件と同等の意味の条件といえる。また、Chan (1994) は、より詳細な数学的議論によりグラフ理論の Matrix Tree 定理を応用して、行列式を用いた条件を証明している。
5. 証明は Yagi (2009) を参照。
6. 証明は Yagi (2009) を参照。
7. 結果が線形変換として「表現できる」というだけであって、当然のことながら Φ 自体は線形変換ではない。
8. 証明は Yagi (2009) を参照。
9. Dhar (1990) は、このような可換な (アーベル的な) 演算によって記述できる (S, s) 的調整モデルのクラスを Abelian Sandpile モデル (ASM) と名づけた。香取 (1997) によれば、この名称は物理学における「アーベル的ゲージ理論」の名称をもじったものである。
10. 証明は Yagi (2009) を参照。
11. 証明は Yagi (2009) を参照。

参考文献

- [1] Bak, P., K Chan., Scheinkman, J. and Woodford, M., "Aggregate fluctuations from independent sectoral shocks: self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics", *Ricerche economiche*, 47, 1993.
- [2] Caballero, R. and Engel, E., "Dynamic (S, s) Economies", *Econometrica*, 59, 1991.

- [3] Caplin, A., “The Variability of Aggregate Demand with S,s Inventory Policies”, *Econometrica*, 1985.
- [4] Cooper, R., Haltiwanger, J. and Power, L., “Machine replacement and the business cycle, lumps and bumps”, *American Economic Review*, 89, 921-46, 1999.
- [5] Dhar, D., “Self-Organized Critical State of Sandpile Automaton Models”, *Physical Review Letters*, 64,1990.
- [6] Doms, M. and Dunne, T., “Capital adjustment patterns in manufacturing plants”, *Review of Economic Dynamics*, 1, 409-29, 1998.
- [7] Fisher, J. and Hornstein, A., “(S, s) inventory policies in general equilibrium”, *Review of Economic Studies*, 67, 117-45, 2000.
- [8] Hamermesh, D. and Pfann, G., “Adjustment costs in factor demand”, *Journal of Economic Literature*, 34, 1264-92, 1996.
- [9] Khan, A. and Thomas, J K., “Inventories and the Business Cycle: An Equilibrium Analysis of (S, s) Policies,” *American Economic Review*, vol. 97 (4), p1165-1188, September, 2007
- [10] Scarf, H., “The optimality of (s, S) policies in dynamic inventory method”, *Mathematical Method in the Social Science*, 59, 1960.
- [11] Yagi, N., “Algebraic aspects of The (S, s) Economy”, 2009.
- [12] 香取真理『複雑系を解く確率モデル—こんな秩序が自然を操る』講談社, 1997.